Maths: Khôlle 2

2024/09/27

M. Fourre

Louis Dalibard

Problème 1

Soit F un ensemble fini.
Soit $E = P(F)$
Ecrire $A \subseteq B$ sous forme d'intersection de relations d'ordre totales dans une famille $(\leqslant_i)_{i \in I}$

Définitions

Notons $n = |F|$
F est fini donc on peut numéroter ses élements.
$G = \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$
tel que $F \simeq G$ avec g une bijection associant un unique nombre entre 1 et $n-1$ pour chaque élement de F
On peut donc poser la bijection suivante $f : P(F) \to [\![0; 2^n - 1]\!]$
$$X \mapsto \sum_{x \in X} 2^{g(x)}$$

Prenons $I = F$
Pour tout $i \in I$
On définit la relation $\leqslant_i$ sur E tel que $A \leqslant_i B \iff (|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$ ou $(|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \leqslant f(g(B)))$
Montrons que pour tout $i \in I, \leqslant_i$ est une relation d'ordre totale.

Réflexivité

Soit $A \in E$
$A \leqslant_i A$ car $|A \cap \{i\}| = |A \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) = f(g(A))$

Anti-symétrie

Soit $A, B \in E$, tel que $A \leqslant_i B$ et $B \leqslant_i A$
$|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$ et $|A \cap \{i\}| > |B \cap \{i\}|$ impossible donc $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$

Donc $f(g(A)) \leqslant f(g(B))$ et $f(g(A)) \geqslant f(g(B))$
Donc $f(g(A)) = f(g(B))$ Donc $A = B$ par injectivité de g puis de f

Transitivité

Soit $A, B, C \in E$, tel que $A \leqslant_i B$ et $B \leqslant_i C$
Plusieurs cas possibles:

- $|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$ et $|B \cap \{i\}| < |C \cap \{i\}|$
  Donc $|A \cap \{i\}| < |C \cap \{i\}|$ et donc $A \leqslant_i C$
- $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \leqslant f(g(B))$ et $|B \cap \{i\}| < |C \cap \{i\}|$
  Donc $|A \cap \{i\}| < |C \cap \{i\}|$ et donc $A \leqslant_i C$
- $|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$ et $|B \cap \{i\}| = |C \cap \{i\}|$ et $f(g(B)) \leqslant f(g(C))$
  Donc $|A \cap \{i\}| < |C \cap \{i\}|$ et donc $A \leqslant_i C$
- $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \leqslant f(g(B))$ et $|B \cap \{i\}| = |C \cap \{i\}|$ et $f(g(B)) \leqslant f(g(C))$
  Donc $|A \cap \{i\}| = |C \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \leqslant f(g(C))$ et donc $A \leqslant_i C$

Relation d'ordre totale

Soit $A, B \in E$ 4 cas possibles

- $|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$
  Donc $A \preccurlyeq_i B$
- $|B \cap \{i\}| < |A \cap \{i\}|$
  Donc $B \preccurlyeq_i A$
- $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \leqslant f(g(B))$
  Donc $A \preccurlyeq_i B$
- $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$ et $f(g(A)) \geqslant f(g(B))$
  Donc $B \preccurlyeq_i A$

  Donc $\forall A, B \in E, \quad A \preccurlyeq_i B$ ou $B \preccurlyeq_i A$

Conclusion

Soit $A, B \in E$
Montrons que $A \subseteq B \iff \forall x \in I, A \preccurlyeq_i B$ par double implication.

Sens 1: Supposons $A \subseteq B$

$Soit x \in I$ Trois cas de figure possible:

- $|A \cap \{i\}| = 0$ et $|B \cap \{i\}| = 1$
  $|A \cap \{i\}| < |B \cap \{i\}|$
  et dans ce cas là $A \preccurlyeq_i B$
- $|A \cap \{i\}| = 1$ et $|B \cap \{i\}| = 1$ $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$
  et dans ce cas là $f(g(A)) \geqslant f(g(B))$
  Donc $A \preccurlyeq_i B$
- $|A \cap \{i\}| = 0$ et $|B \cap \{i\}| = 0$ $|A \cap \{i\}| = |B \cap \{i\}|$
  et dans ce cas là $f(g(A)) \geqslant f(g(B))$
  Donc $A \preccurlyeq_i B$

Donc $\forall x \in I, A \preccurlyeq_i B$

Sens 2: Supposons $A \nsubseteq B$

Alors il existe un élement $x \in F$, dans A qui n'est pas dans B Et pour cet x, $A \npreccurlyeq_x B$ Donc $\exists x \in I, A \npreccurlyeq_i B$
Donc $A \subseteq B \iff \forall x \in I, A \preccurlyeq_i B$